Klausur

Teil I

Aufgabe 1: Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze — 5 Punkte

(a) Leiten Sie die Impulsbilanz für ein System von Massenpunkten her und formulieren Sie diese in Worten.

(b) Wann gilt Impulserhaltung?

Aufgabe 2: d'Alembert'sches Prinzip — 9 Punkte

(a) Was versteht man unter Massenpunktsystemen mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit?

(b) Erläutern Sie die Begriffe Zwangskraft und eingeprägte Kraft.

(c) Formulieren Sie das d'Alembert'sche Prinzip als Gleichung und in Worten. Erklären Sie dabei, was man unter virtuellen Verrückungen versteht.

Aufgabe 3: Lagrange II — 10 Punkte

(a) Was sind generalisierte Koordinaten, generalisierte Geschwindigkeiten und generalisierte Impulse?

(b) Formulieren Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art. Wie ist die Lagrange-Funktion definiert? Unter welchen Bedingungen ist dieser Formalismus anwendbar?

(c) Wann gilt im Lagrange-Formalismus Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung?

Teil II

Aufgabe 1: Potentialdiskussion — 15 Punkte

Ein Massenpunkt bewegt sich unter dem Einfluss einer Kraft der Form $F(x) = (x^2 - 3x + 2)\,(x - 3)$ längs der x-Achse.

(a) Berechnen Sie das zugehörige Potential $U(x)$. Formulieren Sie die Energiebilanz.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen und geben Sie jeweils an, welcher Art (stabil oder labil) das Gleichgewicht dort ist.

(c) Wo kann die Bewegung näherungsweise durch die eines harmonischen Oszillators beschrieben werden? Bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechende(n) Federkonstante(n).

Aufgabe 2: Eigenschaften eines Kraftfeldes — 12 Punkte

Ein Massenpunkt bewege sich in einem Kraftfeld der allgemeinen Form $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, das in jedem Punkt des Raumes zur z-Achse gerichtet sei.

(a) Geben Sie die Komponenten des Kraftfeldes in Zylinderkoordinaten an, d.h. in der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_\rho(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\rho + F_\varphi(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\varphi + F_z(\rho,\varphi,z)\vec{e}_z.$$

(b) Unter welchen Bedingungen ist $\vec{F}$ konservativ? Bestimmen Sie hierbei genau, von welchen der Koordinaten ρ, φ, z die Funktionen F_ρ, F_φ, F_z in welcher Weise abhängen und welche Abhängigkeiten zwischen den Funktionen F_ρ, F_φ, F_z bestehen müssen.

(c) Schreiben Sie die Drehimpulsbilanz für dieses Kraftfeld auf. Welche Konsequenzen ergeben sich?

Aufgabe 3: Zentralkraftfeld

23 Punkte

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential $U = -\frac{a}{r^2}$, $a > 0$, $a = \text{const}$.

(a) Berechnen Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft.

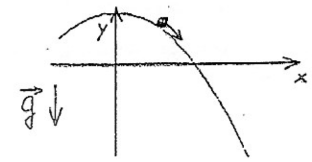
(b) Welche Erhaltungssätze gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie die Funktion $r = r(t)$ (r: Abstand des Teilchens vom Kraftzentrum) für ein Teilchen mit der Energie $E = 0$, das zur Zeit $t = 0$ im Abstand $r_0 > 0$ vom Kraftzentrum ruht.

Aufgabe 4: d'Alembert'sches Prinzip

26 Punkte

Ein Massenpunkt gleite reibungsfrei einen Berg hinunter, dessen Form mathematisch durch die Funktion $f = f(x) = h - \alpha x$; $h > 0$, $\alpha > 0$ (beide konstant) gegeben sei (siehe Skizze). Die z-Komponente werde (etwa durch die Wirkung einer Schiene) konstant gehalten. Die Energie E des Massenpunktes sei gleich seiner potentiellen Energie U im Punkt $x = 0$.



(a) Wie sehen die virtuellen Verrückungen des Massenpunktes aus?

(b) Wie lautet hier das d'Alembert'sche Prinzip?

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des d'Alembert'schen Prinzips und der Newton'schen Axiome die Bewegungsgleichungen dieses Massenpunktes.

(d) Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Zwangskräfte.

(e) Wie lautet der Energiesatz für diese Bewegung?

(f) Finden Sie heraus, ob der Massenpunkt auf der Bahn verbleibt oder sich ablöst.

Aufgabe 5: Lagrange II

23 Punkte

Betrachtet werde das ebene mathematische Pendel.

(a) Leiten Sie die Nebenbedingungen her, die für dieses System gelten.

(b) Bestimmen Sie angepasste generalisierte Koordinaten.

(c) Ermitteln Sie die Lagrange-Funktion für dieses System in Abhängigkeit der in (b) bestimmten Koordinaten.

(d) Formulieren Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art für dieses System.

(e) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage dieses Systems. Ist diese Lage stabil? Gibt es instabile Gleichgewichtslagen?

(f) Finden Sie unter Annahme kleiner Auslenkungen aus der stabilen Gleichgewichtslage lineare Bewegungsgleichungen, die diese Auslenkungen in erster Näherung beschreiben, und lösen Sie diese. Wie groß ist in dieser Näherung die Schwingungsdauer?

Angabe von vektoriellen Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten:

Zylinderkoordinaten:

$$U = U(\rho,\varphi,z); \qquad \vec{F} = \vec{F}(\rho,\varphi,z) = F_\rho(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\rho + F_\varphi(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\varphi + F_z(\rho,\varphi,z)\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)\right)\vec{e}_\rho + \rho\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(-\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi)\right)\vec{e}_z\right]$$

Welsch Altklausur WS 96/97

Teil I:

Aufgabe 1)

a.) $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \qquad \vec{p}_i = \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i) \qquad \vec{p}_{ges} = \sum_i \vec{p}_i$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{ges}) = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{p}_i) = \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i) = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i F_i$$

$$= \underbrace{\sum_i (\vec{F}_i^{(int)}}_{=0 \text{ zu jedem } \vec{F}_i^{(int)} = -\vec{F}_i^{(ext)}} + \vec{F}_i^{(ext)}) =: \vec{F}_{ges}^{(ext)}$$

b.) Wenn $\vec{F}_{ges}^{(ext)} = 0$

Aufgabe 2)

a.) n-Massepunkte, m-Zwangsbedingungen $g_\alpha(\vec{r}_n, t) = 0$

b.) · ZK: stellt ZB sicher, $\vec{Z} \sim \text{grad } g$
· eingeprägte Kraft: äußere, „physikalische" Kraft

c.) · $\delta W = 0 \qquad W = \int \vec{Z}\, \delta\vec{r}$
· virtuelle Verrückung: gedachte mit ZB verträgliche Verrückungen, instantan ($\delta t = 0$)

Aufgabe 3)

a.) generalisierte Koordinaten: angepasst, implementieren ZB automatisch (einem MP nicht zugängliche Gebiete werden durch gen. Koordinaten nicht erfasst)
q_k; $k = 1, \dots, \#$ Freiheitsgrade
- generalisierte Geschwindigkeiten: $\dot{q}_k = \frac{d}{dt} q_k$
- generalisierte Impulse: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

b.) $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad L = L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - U$

→ keine dissipativen Kräfte → Potential einführbar
wichtig: auch in nicht IS - anwendbar

c.) Energie: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad$ Impuls: $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow q_k$ zyklisch $\Rightarrow p_k$ erhalten

Drehimpuls: bzw. Zylinderkoor.: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const.} \sim L$

Teil II

Aufgabe 1)

a.) $U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \overset{x_0=0}{=} -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 6x$

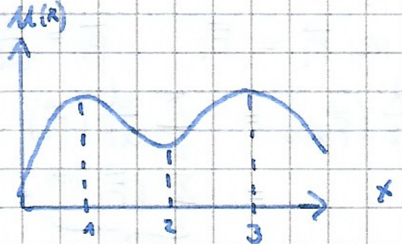
$E = T + U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \ldots$

$\frac{dE}{dt} = 0$

b.) Kurvendiskussion

$\hookrightarrow \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_i^0} = 0$

Plot:



c.) bei $x_2^0 = 2$ nenne $x - x_2^0 \equiv \varepsilon$ $\quad \varepsilon \ll 1$

$\Rightarrow U(\varepsilon) = U(2) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=2}\varepsilon + \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

$= 2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2$

$\Rightarrow F(\varepsilon) = -\operatorname{grad} U = -\varepsilon = -k\cdot\varepsilon \Rightarrow k = 1$

Aufgabe 2)

$F(\vec{r}) = -F_\rho(\rho,\varphi,z)\,\vec{e}_\rho + F_z(\rho,\varphi,z)\,\vec{e}_z$

b.) $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) \overset{!}{=} 0$

$= \frac{1}{\rho}\left[(\partial_\varphi F_z - \partial_z(\rho F_\varphi))\vec{e}_\rho + \rho(\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z)\vec{e}_\varphi + (-\partial_\varphi F_\rho + \partial_\rho(\rho F_\varphi))\vec{e}_z\right]$

$0 = \partial_\varphi F_z\,\vec{e}_\rho + \rho(\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z)\vec{e}_\varphi - \partial_\varphi F_\rho\,\vec{e}_z$

c.) Drehimpulsbilanz: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = (\rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z)\times(-F_\rho\,\vec{e}_\rho + F_z\,\vec{e}_z)$

$= -(\rho F_z + z F_\rho)\,\vec{e}_\varphi$

Drehimpulserhaltung: $F_z = -\frac{z}{\rho}F_\rho$

Aufgabe 3) $U = -\frac{a}{r^2}$

a.) $F = -\operatorname{grad} U = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r = -\frac{2a}{r^3}\vec{e}_r$

b.) Für ein Zentralkraftfeld gilt immer Drehimpulserhaltung!

Drehimpuls: $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = -\frac{2a}{r^3}(r\,\vec{e}_r)\times\vec{e}_r = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

Als Bewegungsebene kann $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ gewählt werden, dann $-\vec{e}_\vartheta = \vec{e}_z$
(Kugelkoor. $\to$ Zylinderkoor.)

$\vec{L} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = m\vec{r}\times(\dot{r}\,\vec{e}_r + \underbrace{r\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta}_{=0} + r\underbrace{\sin\vartheta}_{=1}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)$

$= mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$

Welsch Altklausur WS 96/97

Energie: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$

$$m\cdot(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{2a}{r^3} \quad | \cdot \dot{r}$$

$$m\cdot(\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}r\dot{\varphi}^2) = -2a\frac{\dot{r}}{r^3}$$

0, da $\ddot{\varphi} = 0$ ($\vec{L}$ erhalten)

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = 2\dot{r}\ddot{r} + 2r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + \cancel{2r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{d}{dt}\left(+\frac{a}{r^2}\right) \quad | \int \dots dt$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{a}{r^2} = E$$

Impuls: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \neq 0$

c.) $\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{a}{r^2} = E$

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{\ell^2}{m^2r^2} + \frac{2a}{mr^2} = \frac{2a}{mr^2}$$

$\dot{\vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \ell = 0$

$E = 0$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2a}{m}}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\pm dt = r\cdot\sqrt{\frac{m}{2a}}\,dr$$

wähle „−" da attrak. Potential

$$\Rightarrow t - t_0 = -\frac{1}{2}(r^2 - r_0^2)\sqrt{\frac{m}{2a}}, \quad t_0 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = r_0^2 - 2\sqrt{\frac{2a}{m}}$$

Aufgabe 4)

$g_1(x,y) = y + \alpha x^2 - h = 0$ (bzw. ≥ 0) $\quad g_2(z) = z = 0$

a.) $\vec{Z}\cdot\delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} g_1 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha x \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow 2\alpha x\,\delta x + \delta y = 0$$

c.) $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{ges} = \vec{Z} + \vec{F} \quad | \cdot \delta\vec{r}$

$$\Rightarrow 0 = \vec{Z}\,\delta\vec{r} = (m\ddot{\vec{r}} - \vec{F})\,\delta\vec{r}, \quad \vec{F} = -mg\,\vec{e}_y$$

$$= m\ddot{x}\,\delta x + (m\ddot{y} + mg)\,\delta y$$

$$= m(\ddot{x} - 2\alpha x(\ddot{y} + g))\,\delta x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = 2\alpha x(\ddot{y} + g)$$

d.) $\vec{Z} = \lambda \operatorname{grad} g_1 = \lambda\begin{pmatrix} 2\alpha x \\ 1 \end{pmatrix}$

Lagrange I: $\quad m\ddot{x} = \lambda\, 2\alpha x \quad (1)$

$\quad m\ddot{y} = \lambda - mg \quad (2)$

$$0 = \ddot{g}_1 = \ddot{y} + 2\alpha x\ddot{x} + 2\alpha\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + 2\alpha x\ddot{x} = -2\alpha\dot{x}^2$$

$\frac{1}{m}(2) + \frac{2\alpha x}{m}(1): \quad -2\alpha\dot{x}^2 = \frac{\lambda}{m} - g + \frac{4\alpha^2\lambda}{m}x^2$

$\Rightarrow \lambda = m\,\frac{g - 2\alpha\dot{x}^2}{1+4\alpha^2x^2}$

e.) $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T+U) = \vec{Z}\cdot\dot{\vec{r}}$

$\frac{d}{dt}(T) = m\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = (\vec{F}+\vec{Z})\dot{\vec{r}} \qquad \vec{F}\dot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}}\,\mathrm{grad}\,U = -\frac{dr}{dt}\begin{pmatrix}\partial U/\partial x\\ \partial U/\partial y\\ \partial U/\partial z\end{pmatrix}$

$= -\left[(\partial_x U)\dot{x} + (\partial_y U)\dot{y} + (\partial_z U)\dot{z}\right] - \frac{\partial U}{\partial t}$

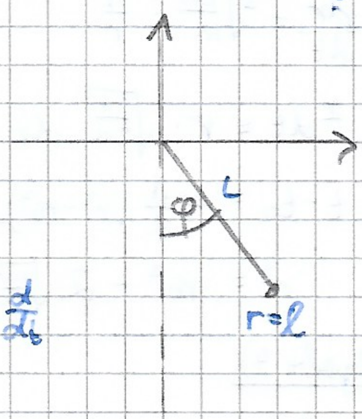
f) suchen VZ-wechsel d. Zwangskraft

$\Rightarrow \lambda \overset{!}{=} 0$: Geschw. beim Abheben $\dot{x} = \sqrt{\frac{g}{2\alpha}}$

Energiebilanz: $\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + mgy = E \qquad y = h - \alpha x^2, \quad \dot{y} = -2\alpha x\dot{x}$

$\Rightarrow \frac{mg}{4\alpha} + \cancel{mg\alpha x^2} + mgh - \cancel{mg\alpha x^2} = E$

$\Rightarrow E = mg\left(h + \frac{1}{4\alpha}\right) > E_0$ Dh. startet MP in Ruhe, wäre $E = mgh$ ↯



<u>Aufgabe 5)</u> $g_1(z) = 0 \quad g_2 = l - r = 0$

b.) φ

c.) $L = T - U = \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$

d.) $\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -mgl\sin\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \;\Big|\, \frac{d}{dt}$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi}$

$\Rightarrow -mgl\sin\varphi = ml^2\ddot{\varphi}$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$

e.) $\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}^2) = \frac{g}{l}\frac{d}{dt}(\cos\varphi)$

$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l}\cos\varphi + A$

$\ddot{\varphi} = 0$ für $\sin\varphi = 0 \rightarrow \begin{cases}\varphi = 0 \rightarrow \text{stabil}\\ \varphi = \pi \rightarrow \text{instabil}\end{cases}$

f.) $\sin\varphi = \varphi + \mathcal{O}(\varphi^3)$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$